

# Wolfgang Gröbner – Mathematische Leistungen

## MATHEMATISCHE LEISTUNGEN \*)

**1 Irreduzible Ideale – Gröbner-Dualität:** Nach seiner Promotion (Dissertation bei *Furtwängler*) im Jahre 1932 untersucht *Gröbner* auf Anregung von *Emmy Noether* irreduzible Ideale in kommutativen Ringen:  $a = b \cdot c$  mit  $a \nmid b$  und  $a \nmid c$  nennt man reduzibel; ist dies nicht möglich, so heißt das Ideal  $a$  irreduzibel.

Die von *Gröbner* entwickelte Dualitätstheorie irreduzibler Ideale mündet ebenso wie die *Pontrjaginsche* und die *Grothendiecksche* in die *Matlis-Dualität*. *W. Krull* hat den Wert der *Gröbner-schen* Arbeit sofort erkannt und sie in seinem Enzyklopädieartikel über die *Theorie der Polynomideale und Eliminationstheorie* ausführlich referiert.

**2 Struktur der Primärideale – Gröbner-Korrespondenz:** Ein zentrales Anliegen *Gröbners* war es, die Struktur von Primäridealen durch Differentialbedingungen zu charakterisieren. Zugrunde liegt die einfache Idee, die Vielfachheit einer Nullstelle eines Polynoms in einer Variablen durch die Ableitung auszudrücken:  $x_0$  Nullst. Vielfachh.  $k$  von  $f \Rightarrow f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, f^{(k)}(x_0) \neq 0$  Begonnen hatte er damit in der zweiten Annalenarbeit mit Primidealen – dort wird mit der *Primbasis* übrigens auch ein Beispiel einer *Gröbnerbasis* (siehe 6) untersucht - das Problem für Primideale formuliert und zum Teil gelöst. Für diesen Fall führten *M.G. Marinari, H.M. Möller* und *T. Mora* 1966 die Bezeichnung *Gröbner duality* ein.

**3 Multiplizität – Syzygien:** Schon beim Hauptsatz der Algebra muß man die Nullstellen mit ihrer Multiplizität zählen, um über  $\mathbb{C}$  für ein Polynom  $n$ -ten Grades  $n$  Nullstellen zu erhalten. Der Schnitt höherdimensionaler Varietäten erfordert, um die *richtige* Anzahl an Schnittpunkten zu erzwingen, entweder eine *dynamische* Vorgangswise (wie etwa in der Topologie: Man *verwackelt* die Situation ein wenig) oder eine mehr *statische* Betrachtung: Man legt die Multiplizität eines Primärideals (durch *Macalays Länge*) ein für alle mal fest und verzichtet auf die Allgemeingültigkeit des sog. *Bezoutschen Satzes*. Die anfangs umkämpfte Entwicklung des *Gröbnerschen* statischen Standpunkts in Zusammenarbeit mit den *Hallenser* Algebraikern unter Führung des leider allzu früh verstorbenen *Wolfgang Vogel* hat zuletzt *H. Flenner* vorbildlich dargestellt.

**4 Differentialgleichungen und Lie-Reihen:** In einem Brief vom 4. 3. 1943 von *Gröbner* an *Doetsch* kündigt sich ein weiterer Forschungsschwerpunkt an: "*Als eine der dringendsten Aufgaben für die theoretische Forschung würde ich die ansehen, systematisch die Untersuchung der nichtlinearen Differentialgleichungen aufzunehmen. Beinahe alle Probleme, wo man sich nicht mehr mit den allerersten Annäherungen begnügen darf, führen auf nichtlineare Dgln. und hier liegt fast noch gar nichts an theoretischer Forschung vor*". Ab dem Jahr 1958 begann *Gröbner* sich damit systematisch auseinanderzusetzen! Er knüpfte bei der Darstellung der Lösung einer Anfangswertaufgabe für ein System gewöhnlicher Dgln. (\*)  $x' = f(x), x(t_0) = x_0$  bei *Sophus Lie* an. Wesentliches Ergebnis ist eine Störungsformel.

**5 Orthogonale Polynome – Mathematik für Physiker:** Seit der Zeit bei *Picone* in Rom faszinierte *Gröbner* die Konstruktion orthogonaler Polynomsysteme mit Hilfe eines Extramalprinzips. *P. Lesky* hat dies fortgeführt und erweitert. Erwähnenswert ist, dass er jüngst die Dissertation, die *G. Sonderegger* unter *Gröbners* Anleitung 1965 ausgearbeitet hat, aufgegriffen hat und mit dem nun seit über 35 Jahren an einem Vorarlberger Gymnasium tätigen Kollegen eine gemeinsame Arbeit verfasst hat. Nicht vergessen sollte man *Gröbners* Bücher *Mathematische Methoden der Physik, Differentialgleichungen* und *Matrizenrechnung*, die Klassiker der Lehrbuch-literatur waren.

**6 Gröbner-Basen und Gröbner-Deformationen:** Wenn man im MathSciNet unter *Anywhere* nach *Gröbner* sucht, erhält man derzeit gegen 1000 Einträge - mehr als 90% davon betreffen *Gröbner-Basen*. Es ist dies ein Denkmal, das *Bruno Buchberger* mit dieser Bezeichnung seinem Lehrer setzte: Im Sommersemester 1964 begann *Gröbner* in seinem

Dissertantenseminar über *Dimensionstheorie der Polynomideale* mit nulldimensionalen Polynomidealen  $\mathfrak{a}$  ein Verfahren zu beschreiben, das eine Basis der Polynomalgebra  $K[x]/\mathfrak{a}$  liefert. Aus der Multiplikationstafel lässt sich auch ein bemerkenswertes neues Erzeugendensystem für das Ideal  $\mathfrak{a}$  rückgewinnen. *Gröbner* regte *Buchberger* an, daraus einen Algorithmus zu destillieren und dies auf der ZUSE 23 zu implementieren.